Úlohy 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

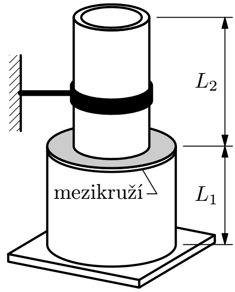
1. Nádoba z trubek

Dva zbytky trubek různých délek L_1 a L_2 a různých vnitřních průřezů S_1 a S_2, odříznuté kolmo k ose, byly svařeny s mezikružím z tenkého plechu tak, aby měly společnou osu. Takto vzniklá nádoba byla upevněna vertikálně, širší část dole (obr. 1). Zespoda je k nádobě přitlačována záklopka. Aby záklopka neodpadla, musí na ni zdola působit síla o velikosti nejméně F_0. Když do nádoby nalijeme vodu o objemu V_0, zvýší se minimální síla potřebná k udržení záklopky na dvojnásobek. Když přidáme znovu vodu o objemu V_0, zvýší se síla potřebná k udržení záklopky opět na dvojnásobek, tedy na $4F_0$. Když pak přidáme ještě vodu o objemu $3/8V_0$, zvětší se minimální síla potřebná k udržení záklopky o F_0 a nádoba bude plná.

a) Jaký je poměr průřezů trubek $S_1 : S_2$?

b) Jaký je poměr délek trubek $L_1 : L_2$?

c) Vodu vylijeme, nádobu obrátíme a zespodu opět přitlačíme záklopku o stejné hmotnosti stejnou minimální silou. Jak se změní minimální síla, kterou musíme záklopku přidržovat, přidáme-li vodu o objemu V_0, znovu o objemu V_0 a po doplnění nádoby po horní okraj?



Obr. 1

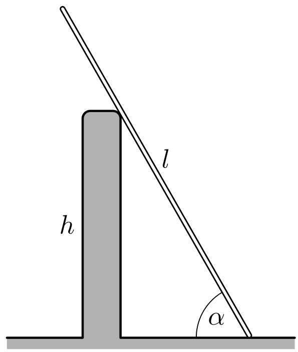
2. Lať opřená o zeď

Lať o délce l a hmotnosti m je opřena o zeď výšky $h = 0{,}6l$ tak, že s vodorovnou rovinou svírá úhel α (obr. 2). Těžiště latě je uprostřed, horní konec latě přesahuje přes zeď. Horní konec zdi je hladký, takže mezi ním a latí nevzniká tření.

a) Určete velikost a směr síly, kterou lať působí dolním koncem na vodorovnou rovinu.

b) Jaký musí být součinitel f smykového tření mezi dolním koncem lati a vodorovnou rovinou, aby lať nesklouzla dolů?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 12$ kg, $\alpha = 60°$.



Obr. 2

3. Brzdění automobilů

Osobní automobil pohybující se rychlostí $v_1 = 72\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ dojíždí nákladní automobil pohybující se rychlostí $v_2 = 54\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. V okamžiku, kdy se nachází ve vzdálenosti $L = 15$ m za nákladním automobilem, začne brzdit se zrychlením o velikosti $a = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Na jakou minimální vzdálenost l_{min} se automobily přiblíží?

b) Jakou nejvyšší rychlostí v_{1m} může jet osobní automobil před začátkem brzdění, aby nedošlo ke srážce?

c) Jak se změní výsledky a) a b), začne-li nákladní automobil brzdit současně s osobním automobilem, ale může brzdit jen se zrychlením o velikosti $a/2$?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

4. Kulička ve vagónu

Vagón tažený lokomotivou se začal z klidu rozjíždět po přímých vodorovných kolejích rovnoměrně zrychleným pohybem. Pozorovatel ve vagónu zjistil, že mezi přední a zadní stěnou vagónu je vzdálenost $l = 18{,}0$ m a že malá plná homogenní kulička, která se na počátku nacházela u přední stěny vagónu, během rozjíždění přejela za dobu $t = 12{,}0$ s k zadní stěně. Po nepružném nárazu na zadní stěnu se neodrazila a zůstala na místě.

a) Určete velikost a_0 zrychlení vagónu.

b) Určete dráhu s ujetou vagónem během pohybu kuličky ve vagónu.

c) Určete velikost v_1 rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně před nárazem a velikost v_2 rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně po nárazu.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Valivý odpor a odpor vzduchu při pohybu kuličky zanedbejte. Moment setrvačnosti koule je $\frac{2}{5}mr^2$.

5. Ohřev vody

Ve varné konvici s užitečným tepelným výkonem $P = 2\,000$ W uvedeme do varu vodu o hmotnosti $m = 1{,}00$ kg. Voda nalévaná do konvice má vždy počáteční teplotu $t_0 = 20$ °C. V průběhu ohřívání občas zjistíme, že k uvaření čaje či kávy potřebujeme více nebo naopak méně vody, než jsme původně do varné konvice nalili. Uvažujme tři režimy ohřívání:

a) Vodu o hmotnosti $m = 1{,}00$ kg uvedeme do varu najednou.

b) Nejprve dáme do konvice vodu o hmotnosti $m_1 = 0{,}60$ kg, po dosažení teploty $t_1 = 70$ °C přidáme vodu o hmotnosti $m_2 = 0{,}40$ kg.

c) Nejprve dáme do konvice vodu o hmotnosti $m_0 = 1{,}40$ kg, po dosažení teploty $t_1 = 70$ °C odlijeme vodu o hmotnosti $m_2 = 0{,}40$ kg.

Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti teploty vody v konvici na čase pro jednotlivé režimy ohřívání.

Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, teplota varu vody $t_{\mathrm{v}} = 100$ °C. Únik tepla do okolí zanedbáváme.

6. *Praktická úloha:* **Studium modelu plynu v nádobě**

Úloha navazuje na článek 1.5 v učebnici Bartuška, K., Svoboda, E.: Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika. Pozorně jej prostudujte.

Mějme nádobu, kterou symbolicky rozdělíme na dvě části stejného vnitřního objemu. Do nádoby napustíme plyn s počtem N částic stejného druhu a budeme v náhodně vybraných okamžicích zjišťovat počet N_l částic v levé polovině nádoby a počet N_p částic v pravé polovině nádoby ($N_\mathrm{l} + N_\mathrm{p} = N$). Provedeme simulační experiment s náhodným rozdělením 7 částic v levé a v pravé polovině nádoby.

Úkoly:

a) Rozdělení 7 částic budete simulovat házením 7 stejných mincí. Předem dohodou stanovíme, že dopad konkrétní mince lícem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v levé polovině nádoby a dopad rubem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v pravé polovině nádoby. Všech 7 mincí vezmeme do dlaní, důkladně protřepeme a hodíme na vodorovnou ohraničenou plochu. Po dopadu zjistíme počet N_l mincí, které dopadly lícem navrch a počet N_p mincí, které dopadly rubem navrch. Výsledek pokusu, tj. rozdělení na N_l a N_p, zaznamenáme čárkou v příslušném řádku 2. sloupce tabulky. Takto provedeme nejméně 220 pokusů. Poté zapíšeme počty čárek v jednotivých políčkách. V 3. sloupci spočteme změřenou pravděpodobnost, tj. poměr počtu konkrétního stavu a celkového počtu pokusů, výsledek vyjádříme desetinným číslem zaokrouhleným na 3 platné číslice. V posledních dvou sloupcích uvedeme výsledky teoretické pravděpodobnosti, tj. poměr předpokládaného počtu stavů s daným rozdělením a počtu stavů všech možných rozdělení. Tento teoretický rozbor až pro 4 částice je uveden ve zmíněné účebnici.

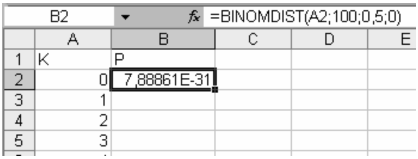
$N_\mathrm{l} - N_\mathrm{p}$	Změřený počet stavů	Změřená pravděpodobnost	Teoretická pravděpodobnost	
	Čárky – počet	Desetinné číslo (3 platné číslice)	Zlomek	Desetinné číslo (3 platné číslice)
0 – 7				
1 – 6				
2 – 5				
3 – 4				
4 – 3				
5 – 2				
6 – 1				
7 – 0				
Součet				

b) Sestrojte v Excelu sloupcové grafy závislosti změřené a teoretické pravděpodobnosti rozdělení na počtu částic ve zvolené (levé) polovině nádoby (oba grafy v jednom obrázku).

Statistika, kterou vyšetřujeme, patří mezi *binomická rozdělení*. Teoretická pravděpodobnost, že ve zvolené polovině nádoby bude K částic z celkového počtu N, je

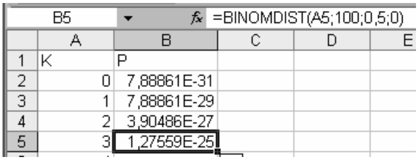
$$p(K,N) = \frac{\binom{N}{K}}{2^N} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-K)}{2^N \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot K}.$$

V Excelu ji můžeme vypočítat pomocí statistické funkce BINOMDIST, kam jako parametry dosadíme K; N; 0,5; 0. Chceme-li například vypočítat rozdělení pravděpodobnosti pro $N = 100$, použijeme tabulku podle obr. 3. Do prvního sloupce vložíme čísla od 0 do 100 a do buňky B2 funkci BINOMDIST s parametry A2; 100; 0,5; 0 (obr, 3a). Druhý sloupec pak vypočítáme posouváním vyplňovacího táhla (obr. 3b). Z vyplněné tabulky pak vytvoříme *xy bodový graf.*


B2 =BINOMDIST(A2;100;0,5;0)

	A	B	C	D	E
1	K	P			
2	0	7,88861E-31			
3	1				
4	2				
5	3				

Obr. 3a


B5 =BINOMDIST(A5;100;0,5;0)

	A	B	C	D	E
1	K	P			
2	0	7,88861E-31			
3	1	7,88861E-29			
4	2	3,90486E-27			
5	3	1,27559E-25			

Obr. 3b

c) Vyšetřete rozdělení teoretické pravděpodobnosti pro různá N a výsledky porovnejte. Zformulujte závěr, který vyplývá pro skutečné, tj. obrovské soubory částic (řádově 10^{23}).

7. Lyžař

Lyžařskou sjezdovou dráhu můžeme modelovat nakloněnou rovinou o stálém úhlu sklonu $\alpha = 17{,}5°$ k vodorovné rovině. Mezi nadmořskou výškou startu a cíle je rozdíl $h = 630$ m. Na startu je připraven závodník o hmotnosti $m = 80$ kg. Součinitel smykového tření mezi skluznicí a svahem je $f = 0{,}070$. Aerodynamické vlastnosti lyžaře charakterizuje odporový součinitel $C = 0{,}70$ a obsah řezu kolmého ke směru pohybu $S = 0{,}70\ \mathrm{m}^2$. Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}25\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

a) Určete, s jakým zrychlením by se lyžař pohyboval, jaké rychlosti by dosáhl v cíli a jak dlouho by jel po této dráze, kdyby na něj nepůsobily žádné odporové síly.

b) Zjistěte, zda samotné smykové tření podstatně ovlivní výsledky z úlohy a).

c) Při větších rychlostech se při jízdě výrazně projeví vliv odporu vzduchu. Stanovte, jaké největší rychlosti lyžař dosáhne, a odhadněte, jak dlouho by jízda trvala, kdyby ji skoro celou absolvoval touto rychlostí.

Úlohu řešte nejprve obecně a pak pro dané hodnoty.